3-я Олимпиада Мегаполисов

День 2. Решения

Задача 4. Пусть k — натуральное число, и $1 = d_0 < d_1 < \ldots < d_m = 4k$ — все положительные делители числа $4k$. Докажите, что найдется $i \in \{1, \ldots, m\}$ такое, что $d_i - d_{i-1} = 2$. *(Ivan Mitrofanov)*

Решение 1. Предположим, что такого i нет. Это значит, что если d и $d+2$ — делители числа $4k$, то $d+1$ также является делителем. Заметим, что если a — делитель числа $4k$, причем a не делится на 4, то $2a$ — тоже делитель числа $4k$. Пользуясь указанными свойствами, начав с пары $(1, 2)$, будем находить у числа $4k$ новые пары делителей вида $(a, a+1)$ такие, что a и $a+1$ не кратны 4.

Пусть $(a, a+1)$ — пара делителей числа $4k$, ни один из которых не делится на 4. Тогда числа $2a$ и $2a+2$ — также делители числа $4k$, а значит, и $2a+1$ — делитель. Оба числа $2a$ и $2a+2$ не могут одновременно делиться на 4, поэтому в одной из пар $(2a, 2a+1)$, $(2a+1, 2a+2)$ оба числа — делители числа $4k$, не делящиеся на 4.

К новой паре можно применить это рассуждение снова, и т. д. Таким образом, начав с пары $(1, 2)$, мы получим пары $(2, 3)$, $(5, 6)$, $(10, 11)$, $\ldots$ При переходе к новой паре сумма чисел в паре увеличивается, поэтому получаем бесконечное множество делителей числа $4k$. Противоречие. $\square$

Решение 2. Предположим противное. Обозначим наименьшее натуральное число, не являющееся делителем $4k$, через t. Тогда $1, 2, \ldots, t-1$ делят $4k$, а t и $t+1$ — не делят, так как иначе $t-1$ и $t+1$ были бы двумя последовательными делителями $4k$.

Следовательно, t и $t+1$ — степени простых чисел, так как в противном случае одно из них разлагалось бы в произведение двух взаимно простых множителей, меньших t, и поэтому делило бы $4k$. Одно из них — степень 2, которую мы обозначим через 2^m, где $m \geqslant 3$. Второе имеет вид $2^m + \varepsilon$, где $\varepsilon = \pm 1$.

Заметим, что число 2^{m-1} делит $4k$, так как 2^m — минимальный четный не-делитель $4k$, и что число $3 \cdot 2^{m-2} + \varepsilon$ делит $4k$, поскольку оно нечетно и меньше $2^m + \varepsilon$ — минимального нечетного не-делителя $4k$. Также отметим, что $4k$ делится на 3.

Тогда числа $3 \cdot 2^{m-1}$ и $2 \cdot (3 \cdot 2^{m-2} + \varepsilon)$ также являются делителями $4k$. Следовательно, зажатое между ними число $3 \cdot 2^{m-1} + \varepsilon$ — тоже делитель $4k$, причем нечетный. Но тогда и $2 \cdot (3 \cdot 2^{m-1} + \varepsilon)$ — также делитель $4k$, как и $4 \cdot (3 \cdot 2^{m-2} + \varepsilon)$. Между ними заключено число $3 \cdot (2^m + \varepsilon)$, и тогда оно тоже делитель $4k$. Получается, что $2^m + \varepsilon$ делит $4k$, противоречие. $\square$

Задача 5. Аня и Максим играют в игру на клетчатой доске 100×100.

Сначала Аня заполняет все клетки доски целыми числами от 1 до 10 000 так, что каждое число встречается по одному разу.

Затем Максим ставит фишку на одну из клеток самого левого столбца по своему выбору. Далее он за несколько ходов передвигает фишку в самый правый столбец. За один ход он может передвинуть фишку из клетки в любую соседнюю с ней по вершине или стороне. За каждую посещенную клетку (включая изначальную) Максим платит Ане такое число монет, которое написано на этой клетке.

Максим хочет заплатить как можно меньше, Аня же хочет получить как можно больше. Сколько монет заплатит Максим, если каждый из них будет действовать наилучшим для себя образом? *(Lev Shabanov)*

Ответ: 500 000 монет.

Решение. Нижняя оценка / стратегия Ани. Пусть Аня заполнит таблицу так, как показано на рис. 1.

1	200	201	400	$\cdots$	9800	9801	10000
2	199	202	399	$\cdots$	9799	9802	9999
3	198	203	398	$\cdots$	9798	9803	9998
4	197	204	397	$\cdots$	9797	9804	9997
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
98	103	298	303	$\cdots$	9703	9898	9903
99	102	299	302	$\cdots$	9702	9899	9902
100	101	300	301	$\cdots$	9701	9900	9901

Рис. 1: к решению задачи 5.

В любом маршруте фишки от левого до правого края доски для каждого целого $1 \leqslant n \leqslant 50$ в столбцах $2n-1$ и $2n$ должны быть две клетки, соседние по стороне или вершине. Нетрудно видеть, что сумма чисел в таких клетках не меньше $200(2n-1)$. Поэтому Максим должен заплатить не менее $200(1+3+5+\ldots+99) = 500\,000$ монет.

Верхняя оценка / стратегия Максима. Рассмотрим произвольную расстановку чисел. Вычеркнем из каждого столбца клетку с наибольшим числом. Тогда наименьшее из вычеркнутых чисел не может быть меньше, чем 100, второе по величине число не меньше 200 и т. д., наибольшее вычеркнутое число равно 10 000. Следовательно, сумма вычеркнутых чисел не меньше, чем $100 + 200 + \ldots + 10\,000 = 505\,000$. Сумма всех чисел на доске равна $1 + 2 + 3 + \ldots + 10\,000 = 50\,005\,000$, а значит, сумма всех оставшихся чисел не превосходит 49 500 000.

Разобьем оставшиеся клетки на 99 путей следующим образом. Первый путь состоит из нижних клеток в столбце, не считая вычеркнутых. Второй путь — из нижних клеток, которые не были вычеркнуты и не вошли в первый путь и т. д. Последний путь будет состоять из самых верхних клеток без учета вычеркнутых. Несложно видеть, что все эти пути являются корректными путями для фишки Максима, так как любые две клетки из одного пути находятся в одной или в соседних строках.

Сумма чисел в клетках этих путей не превосходит 49 500 000, а значит, один из этих маршрутов имеет сумму не больше, чем $49\,500\,000/99 = 500\,000$.

Тогда мы видим, что Аня может заставить Максима заплатить 500 000 монет, а Максиму при правильной игре хватит такого количества монет. Следовательно, ответ 500 000. $\square$

Другое доказательство оценки сверху. Разобьём доску на 50 прямоугольников 2×100. Так как общая сумма чисел на доске равна 50 005 000, то в каком-то из прямоугольников общая сумма чисел не превосходит 1 000 100. Выберем в каждом столбце этого прямоугольника клетку с меньшим числом, и пусть маршрут фишки будет проходить только по этим клеткам, а за S обозначим суммарную стоимость такого маршрута. Если бы мы в каждом столбце выбирали вместо этого бóльшие числа, то суммарная стоимость была бы больше хотя бы на 100. Получается, что общая сумма чисел в этом прямоугольнике не менее $2S + 100$ и не более 1 000 100, откуда $S \leqslant 500\,000$. $\square$

Задача 6. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC и AC в точках D и E соответственно. Пусть P — точка на меньшей дуге DE окружности такая, что $\angle APE = \angle DPB$. Отрезки AP и BP пересекают отрезок DE в точках K и L соответственно. Докажите, что $2KL = DE$.

(Dušan Djukić)

Свойство симедианы. Симедиана треугольника из данной его вершины определяется как отражение медианы треугольника из этой вершины относительно биссектрисы из той же вершины (рис. 2). В решениях ниже мы будем использовать хорошо известное свойство симедианы, а именно то, что она проходит через пересечение касательных к описанной окружности треугольника, проведенных в двух других вершинах.

Решение 1. Обозначим через F точку касания вписанной окружности со сто-

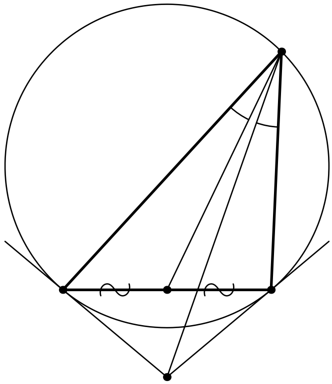

Рис. 2: к решению задачи 6.

роной AB и обозначим через M и N соответственно середины отрезков EF и DF (рис. 3). Так как PB является симедианой в треугольнике DPF, имеем

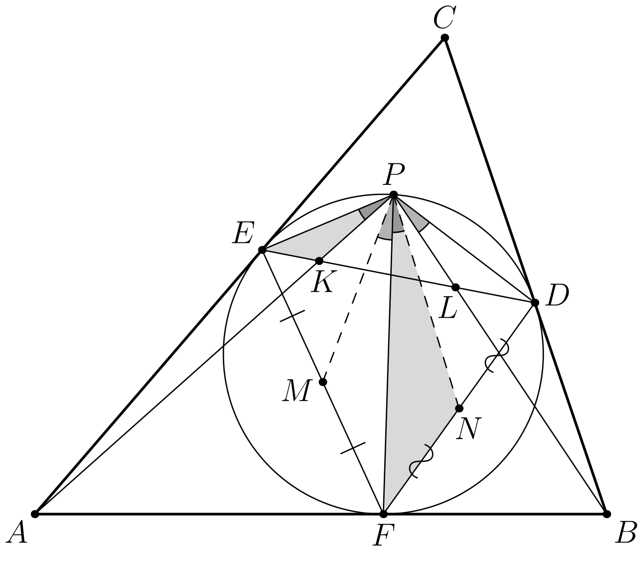

Рис. 3: к решению задачи 6.

$\angle KPE = \angle DPB = \angle NPF$. Более того, $\angle PEK = \angle PED = \angle PFN$, а значит $\triangle PEK \sim \triangle PFN$. Аналогично, $\triangle PDL \sim \triangle PFM$. Получаем соотношения $EK = FN \cdot \frac{PE}{PF} = \frac{DF \cdot PE}{2PF}$ и аналогично $DL = FM \cdot \frac{PD}{PF} = \frac{EF \cdot PD}{2PF}$. Значит, $EK + DL = \frac{DF \cdot PE + EF \cdot PD}{2PF} = \frac{1}{2}DE$ по теореме Птолемея. Следовательно, $KL = DE - EK - DL = \frac{1}{2}DE$. $\square$

Решение 2. Обозначим через F точку касания вписанной окружности со стороной AB. Отметим такую точку S на отрезке ED, что $\angle PSE = \angle PDF$ and $\angle PSD = \angle PEF$ (рис. 4). Треугольники PSE и PDF подобны, так как $\angle PED =$

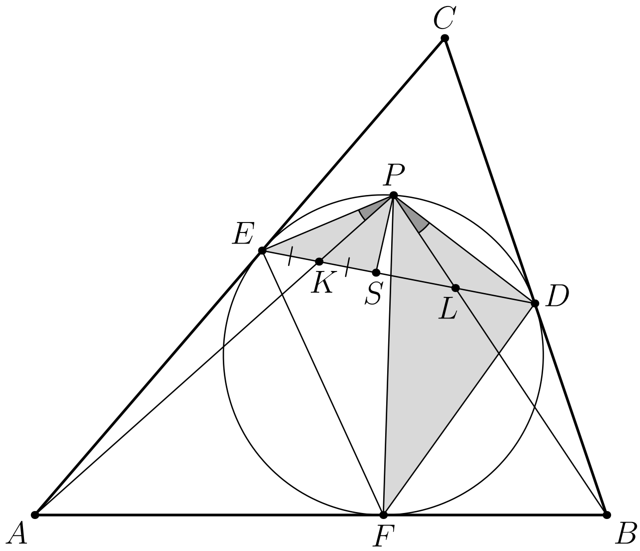

Рис. 4: к решению задачи 6.

$\angle PFD$. Раз $\angle DPB = \angle KPE$ и PB — симедиана треугольника PDF, отрезок PK — это медиана треугольника PSE. Следовательно, $EK = KS$; аналогично $DL = LS$. Имеем $2KL = 2KS + 2SL = EK + KS + SL + LD = ED$. □

Решение 3. Как и раньше, обозначим через F точку касания вписанной окружности со стороной AB. Пусть отрезки AP и BP пересекают вписанную окружность второй раз в точках X и Y соответственно. Заметим, что меньшие дуги EX и DY равны, а значит $XY \parallel DE$. Предположим, что прямые PF и EY пересекаются в точке Q (рис. 5). Четырехугольники $EPFX$ и $YFPD$ — гармонические, и отображение проекции с центром в Q с вписанной окружности на себя переводит точки E, P, F в точки Y, F, P соответственно. Следовательно, это отображение переводит точку X в точку D, т. е. прямая XD также проходит через точку Q.

Проведем прямую ℓ через точку пересечения прямых XE и YD, параллельную прямой DE. Рассмотрим проективное преобразование, сохраняющее вписанную окружность и уводящее прямую ℓ на бесконечность. После действия проективного преобразования прямые DE, XY и ℓ останутся параллельными и отношение отрезков KL/DE не изменится. Более того, четырехугольники $XEPF$ и $DYFP$ останутся гармоническими. После действия проективного преобразования мы получаем рис. 6.

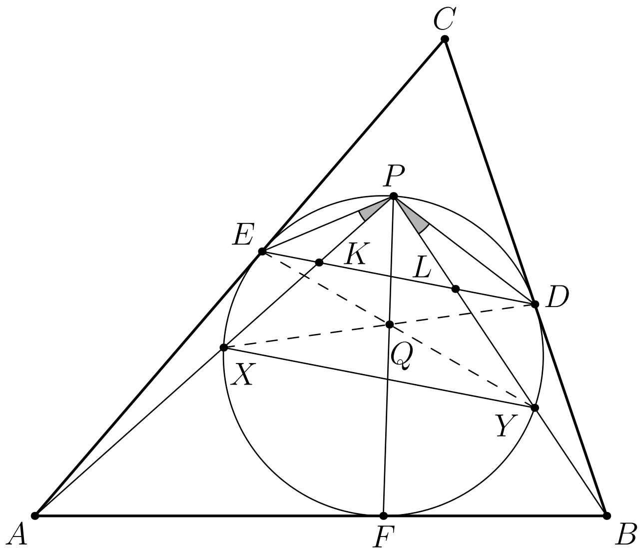

Рис. 5: к решению задачи 6.

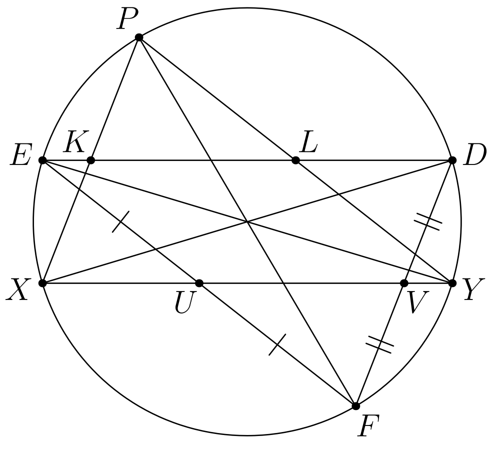

Рис. 6: к решению задачи 6.

Теперь четырехугольник $XYDE$ — прямоугольник, и точка Q — его центр, а точки P и F диаметрально противоположны. Предположим, что прямая XY пересекает отрезки EF и DF в точках U и V, соответственно. Так как прямая XP — симедиана в $\triangle EXF$ и меньшие дуги EP и FY равны, отрезок XU — медиана в $\triangle EXF$, т. е. $EU = UF$. Аналогично, $DV = VF$. Следовательно, треугольники EFD и UFV подобны, и $DE/2 = UV = KL$ из симметрии. $\square$